Matemàtiques arreu i recursos

Racó històric

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799): molt més que una corba

Mònica Blanco
Universitat Politècnica de Catalunya

El 16 de maig del 2014 el *doodle* animat de Google commemorava el 296è aniversari del naixement de Maria Gaetana Agnesi.[21] El *doodle* mostrava un retrat d'Agnesi al centre de la generació animada de la corba cúbica coneguda popularment com "la bruixa d'Agnesi". Aquesta corba ja havia estat estudiada anteriorment, però es va popularitzar gràcies a l'obra d'Agnesi *Instituzioni analitiche*, publicada el 1748. Tanmateix, es tracta d'una corba que porta un nom poc encertat; a més, com diu Findlen (2011, p. 285), no podem reduir el llegat d'Agnesi a una corba mal batejada.

El món de Maria Gaetana Agnesi

A la primera meitat del segle XVIII, Itàlia va viure un moviment catòlic reformista, al qual Mazzoti (2001) es refereix com la Il·lustració Catòlica. Aquest moviment plantejava una reforma del coneixement però dins del marc catòlic. Els il·lustrats catòlics apostaven per una pedagogia de les ciències modernes però sense transgredir els límits de la fe. Aquest grup consistia essencialment en religiosos amb un interès per les pràctiques científiques modernes. Així, la cultura científica moderna va ser promoguda dins del sistema de coneixement tradicional catòlic i principalment en llengua vernacla. Un dels principals bastions d'aquest moviment va ser Milà, on va néixer Maria Gaetana el 1718 (Figura 1), la primogènita d'Anna Brivia i Pietro Agnesi. Es considera que va ser la primera dona que va publicar una obra matemàtica, *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventú italiana* (1748). Al segle XVIII, les dones rarament es comprometien en qüestions científiques, tot i que, en aquest context reformista, les dones amb talent eren acceptades socialment. Si bé és cert que Truesdell (1989) atribuïa a aquest fet la popularitat d'Agnesi en el context matemàtic del segle XVIII, estudis més recents (Cupillari, 2007; Findlen, 2011; Mazzotti, 2001 i 2008; Minonzio, 2006) ofereixen un retrat més positiu de la vida i obra d'aquesta dona fascinant. Agnesi es pot entendre com un producte de la versió milanesa de la Il·lustració Catòlica abans esmentada.

Figura 1. Retrat de Maria Gaetana Agnesi, d'Ephraim Conquy (1836). Font: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Agnesi/

[21] https://www.google.com/doodles/maria-gaetana-agnesis-296th-birthday

El pare de Maria Gaetana, amb una bona posició econòmica gràcies al comerç de la seda, va apostar per l'educació de la seva filla gran i, amb aquest propòsit, li va proporcionar professors-tutors, la majoria dels quals eren religiosos amb interès per la ciència moderna. Entre d'altres, el monjo benedictí olivetà Ramiro Rampinelli (1697–1759), que, com veurem, va tenir un paper important en la producció del llibre d'Agnesi. Als 14 anys, Maria Gaetana ja resolia problemes de geometria analítica i de balística. Als 17 va escriure un comentari crític del *Traité des sections coniques* de L'Hôpital, estudi de l'obra dirigit pel seu tutor comte Carlo Belloni, projecte no publicat. Per ferli un lloc a la societat milanesa, el pare d'Agnesi va convertir el Palazzo Agnesi en un saló cultural, on Maria Gaetana discutia sobre qüestions científiques i filosòfiques en diverses llengües, davant d'erudits de primera línia. Els tòpics de les reunions eren la lògica, l'ontologia, la mecànica, la hidromecànica, l'elasticitat, la gravitació universal, l'òptica, la química, la botànica, la zoologia, la mineralogia i les recents expedicions dels membres de l'Académie des Sciences de Paris a Sud-amèrica i Lapònia per determinar la forma de la Terra, entre d'altres. De fet, el 1738, amb només 20 anys, Agnesi va publicar les *Propositiones philosophicae*, que recollien 191 qüestions defensades per ella en aquestes reunions, dedicat al comte Belloni. El seu biògraf, Anton Francesco Frisi (1734–1817), es refereix a ella com "l'oracolo settilingue" (Frisi, 1799, p. 13), en relació amb el fet que, amb 11 anys, dominava set llengües (llatí, grec, hebreu, francès, alemany, espanyol i italià).

Cap al 1740, Maria Gaetana decideix retirarse de la vida social milanesa per dedicar-se a obres de caritat i a l'estudi de les matemàtiques. És justament aleshores, quan abandona les exhibicions públiques, que elabora el seu famós llibre matemàtic i estableix relacions amb els matemàtics italians més importants de l'època.

Com va néixer *Instituzioni analitiche*?

Tot i estar dividida en diversos estats i ciutats estat, l'homogeneïtat religiosa caracteritza la Itàlia del segle XVIII, on la fe catòlica era acceptada en tots els estats. A les institucions catòliques se'ls va confiar el sistema educatiu, en el qual s'ensenyaven les matemàtiques a un nivell elemental i tradicional, sense especialització (Bottazzini, 1994). Les acadèmies i les societats van ser més actives en la investigació matemàtica, en general, i en l'estudi del càlcul leibnizià, en particular, que no pas a les universitats. Fins i tot a les escoles militars s'impartien matemàtiques a un nivell més alt que a les universitats. El càlcul leibnizià no es va introduir a la Universitat de Pàdua fins trenta anys després de la publicació de l'article seminal de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis* (1684). Però el càlcul ja havia estat estudiat, sobretot al nord d'Itàlia, per individus i grups, com Jacopo Riccati (167754) a Venècia, Giulio Fagnano (168766) a Senigallia i els germans Manfredi a Bolonya (Schubring, 2002).

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell'Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.
IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Figura 2. Frontispici de les Instituzioni analitiche. Font: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-8620

En aquest context, Agnesi va emprendre l'elaboració d'una obra sistemàtica, orientada a l'ensenyament de l'anàlisi cartesiana i el càlcul infinitesimal, les *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana*, en dos volums (quatre llibres), que recullen els principis elementals per a l'ensenyament de l'anàlisi (Figura 2). El primer volum conté el llibre primer, que tracta l'anàlisi de les quantitats finites. Inclou la resolució d'equacions i problemes diversos, la construcció de *locus* i el càlcul de màxims, mínims, tangents, punts d'inflexió i retrocés fent servir l'anàlisi cartesiana. La resta de llibres, al volum segon, tracten sobre anàlisi infinitesimal. El llibre segon mostra els principis del càlcul diferencial leibnizià, mètode de les tangents,

mètode dels màxims i mínims, determinació de punts d'inflexió i de retrocés, determinació de l'evoluta i el radi osculador. El llibre tercer està dedicat al càlcul integral. Presenta les regles d'integració de fórmules finites algèbriques, la integració mitjançant sèries i problemes com la rectificació d'una corba o la quadratura d'un espai. El darrer llibre, *Del mètode invers de les tangents*, versa sobre la teoria i la resolució d'equacions diferencials.

En el seu article del 1989, Truesdell lamentava que Agnesi no hagués inclòs la mecànica racional i la física experimental en les *Instituzioni analitiche*. En canvi, els estudis més recents de Mazzotti han mostrat que Agnesi considerava essencialment les matemàtiques i la geometria com una manera de descobrir certes veritats absolutament influïdes per la filosofia malebranchiana. No volia allunyar-se de l'anàlisi pura i la seva aplicació a la geometria. Per tant, va excloure deliberadament temes físics del seu treball i es va centrar en la geometria per preservar el marc tradicional del coneixement religiós i metafísic.

Després d'una magnífica dedicatòria a l'emperadriu Maria Teresa d'Àustria, que regnava a la Llombardia dels Habsburg, Agnesi adreça un text de presentació "al lector". En aquesta presentació, fa referència a tres figures clau en l'elaboració de la seva obra. Primer de tot, Agnesi agraeix al pare Ramiro Rampinelli el seu guiatge i direcció en l'elaboració de les *Instituzioni*. Rampinelli havia estat deixeble de Gabriele Manfredi (168761) a la Universitat de Bolonya, on ensenyava càlcul. De fet, el 1707 Manfredi havia publicat una obra sobre equacions diferencials, *De constructione aequationum differentialium primi gradus*. Rampinelli, que era professor de matemàtiques a col·legis religiosos a Bolonya i Pavia, va arribar a Milà el 1740 i va començar a visitar el Palazzo Agnesi. A partir del 1747, i gràcies a les seves virtuts com a docent, va ocupar càtedra de Matemàtiques a la Universitat de Pavia (Roero, 2015). Rampinelli el va encoratjar a escriure les *Instituzioni* i, amb la seva ajuda, Agnesi va llegir l'*Analyse démontrée* de Reyneau (1708), que va ser la seva font d'inspiració més important. Està generalment establert que el treball d'Agnesi es basava en bona part en el de Reyneau, tot i que tampoc se'n pot considerar una simple traducció (Blanco, 2008). Segons Agnesi, la intenció de Reynau va ser elaborar un manual sistemàtic per a l'aprenentatge de les diferents branques de l'anàlisi (Agnesi, 1748, *Al lettore*, p. 2). De fet, aquesta serà la principal motivació d'Agnesi a l'hora d'elaborar i publicar una obra per sistematitzar l'anàlisi, per facilitar-ne l'aprenentatge.

Finalment, en relació amb el volum II, llibre sobre càlcul integral, Agnesi parla de la seva relació amb el comte Jacopo Riccati. A través de Rampinelli, Agnesi va establir correspondència amb Riccati, amb qui va mantenir debats sobre temes relacionats amb el càlcul en vista del seu treball prospectiu, majoritàriament de caràcter pedagògic (Roero, 2015). Riccati, que revisava les *Instituzioni* a mesura que Agnesi anava escrivint, va aprofitar per incloure algunes de les seves descobertes matemàtiques en el llibre d'Agnesi, com per exemple, el mètode per calcular logaritmes negatius, la discussió sobre equacions de tercer grau i el seu mètode de polinomis diferencials, una de les parts més complicades de les *Instituzioni*, segons Cupillari (2007, p. 284-285). Els fills de Riccati, Vincenzo i Giordano, també van col·laborar en l'edició de les *Instituzioni*, i d'Agnesi en destaquen l'intellecte, la claredat del llenguatge i la precisió dels seus mètodes.

Val la pena destacar tres fets en relació amb la gènesi de les *Instituzioni analitiche*. D'una banda, Agnesi va escriure la seva obra en italià, en lloc de llatí, per ajudar els joves italians, especialment els seus "germans més joves" (Agnesi, 1748, Al lettore, p. 4). De fet, dels seus tres matrimonis Pietro Agnesi havia tingut en total 21 fills i filles! Findlen (2011, p. 259) destaca la importància de la seva obra per crear el llenguatge del càlcul en italià, i de la seva manera de presentar el càlcul, influència sobre autors italians de manuals de matemàtiques. D'altra banda, la impressió de l'obra va ser privada. Agnesi va fer portar la premsa a casa del seu pare per supervisar personalment la producció i disseny del llibre per treballar-hi. En certa manera, l'obra d'Agnesi es podria considerar com un objecte de luxe: dos volums, 1.044 pàgines en total, en paper de bona qualitat, amb 311 figures en 59 làmines al final de cada volum. Aquest fet en podria, sens dubte, haver dificultat la difusió. Finalment,

al frontispici del llibre (Figura 2), sota el nom de l'autora, es llegeix "Dell' Accademia delle Scienze di Bologna". El juny del 1748 Agnesi envia una versió "prepublicació" del volum I al president de l'Acadèmia de Ciències de Bolonya, el físic i químic Jacopo Bartolomeo Beccari (168766). Dues setmanes més tard, esdevé la quarta dona membre de l'Acadèmia. Laura Bassi (171778), havia estat la primera a rebre aquest reconeixement, figura que ha estat estudiada per Cavazza (1995) i Findlen (1993), entre d'altres.

Més enllà d'Itàlia

Les *Instituzioni analitiche* van viatjar més enllà de Milà. Segons Frisi (1799, p. 57-58), Agnesi va enviar còpies de la seva obra a Roma, París i Londres. En particular, el papa Benet XIV (Prospero Lambertini, 174758), un dels papes més il·lustrats del segle XVIII, en va rebre una còpia. I com a reconeixement per la seva obra, va nomenar Agnesi lectora honorària de matemàtiques a la Universitat de Bolonya. Més enllà d'Itàlia, la bona acollida i els comentaris positius del papa Benet XIV van predisposar d'alguna manera els matemàtics francesos, segons Findlen (2011), a prendre's seriosament l'obra d'Agnesi. A l'Acadèmia de les Ciències de París, Jean-Jacques Dortous de Mairan (167771), sucessor de Fontenelle com a secretari permanent, i Étienne Mignot de Montigny (171782) van informar favorablement sobre les *Instituzioni* el 1749 davant els *académiciens* (Frisi 1799, p. 58-61). Montigny va lloar el treball d'Agnesi no només per la seva claredat i minuciositat, sinó també perquè reunia els mètodes i conclusions de diversos geòmetres. Anys més tard, el 1775, una comissió de l'Académie va decidir preparar un text elemental sobre càlcul, i va autoritzar Pierre Thomas Antelmy (173783) per traduir el segon volum d'Agnesi al francès, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, amb afegits de Charles Bossut (173814). La ressenya de la versió francesa, publicada al *Journal des Sçavans* el febrer del 1776, en destacava la claredat i precisió amb què s'explicaven els principis, i proposava l'obra com a guia abans d'aprofundir en la hidrodinàmica i la mecànica. Aquesta visió va ser compartida per Joseph-Louis Lagrange (173813), que, en els seus *Principi di analisi sublime* (1759), recomanava estudiar el llibre d'Agnesi abans d'atacar matèries superiors, pel seu estil i claredat.

Les *Instituzioni analitiche* arriben a Londres, tot i que en aquest cas sense cap elogi oficial per part de la Royal Society. Però un sector d'erudits devia considerar l'obra d'Agnesi valuosa, ja que John Colson (168760) va traduir-la a l'anglès, *Analytical institutions, in four books*, en notació fluxional. Val la pena recordar que Colson, professor lucasià de Matemàtiques a la Universitat de Cambridge, va publicar el 1736 la traducció anglesa del *Mètode de fluxions i sèries infinites* (1736) d'Isaac Newton (1642/727). Finalment va ser John Hellins (174821) qui va publicar la traducció de Colson pòstumament el 1801. Segons Hellins, Colson considerava l'obra d'Agnesi tan excel·lent que va decidir aprendre italià per traduir-la, perquè també se'n beneficiés la joventut britànica. A més, per fer-la més útil i comprensible a les dones del país, va endegar *The plan of the lady's system of analyticks*, per explicar cada apartat del llibre d'Agnesi, però va morir abans d'acabar el projecte. Sens dubte, el fet que Agnesi fos una dona també va contribuir a la seva fama, i a la circulació de la seva obra. De fet, el matemàtic Jean-Étienne Montucla (172799), després d'afirmar que *Instituzioni analitiche* era una de les millors obres d'anàlisi, afegia que els lectors quedarien sorpresos en comprovar com una persona del sexe femení (i, per tant, poc habituada a les ciències) podia assolir uns coneixements tan profunds d'anàlisi (Montucla, 1758, II, p. 155-156), opinió que, evidentement, s'ha d'entendre contextualitzada.

La corba d'Agnesi

No és sobrer parlar una mica sobre la "famosa" corba. El capítol V del llibre I de les *Instituzioni* està dedicat a la construcció de llocs geomètrics, de grau superior a 2. I, en particular, Agnesi presenta la construcció de la corba cúbica que s'associa al seu nom (Agnesi, 1748, I, §238). Donat el semicercle ADC de diàmetre AC (Figura 3), cal trobar el lloc geomètric dels punts M, exteriors, tal que, traçada MB perpendicular al diàmetre AC, que talla el cercle en D, es compleix (en notació moderna):

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}\,.$$

Agnesi pren x sobre l'eix vertical i y sobre l'eix horitzontal i anomena: $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$ (Figura 4). Aleshores, aplicant la propietat del cercle i la condició del problema, arriba a l'equació del lloc geomètric buscat:

$$y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$$

És fàcil veure que aquesta expressió també la podríem reescriure com:

$$x = \frac{a^3}{y^2 + a^2}$$

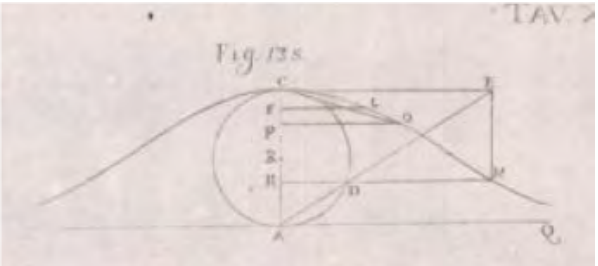
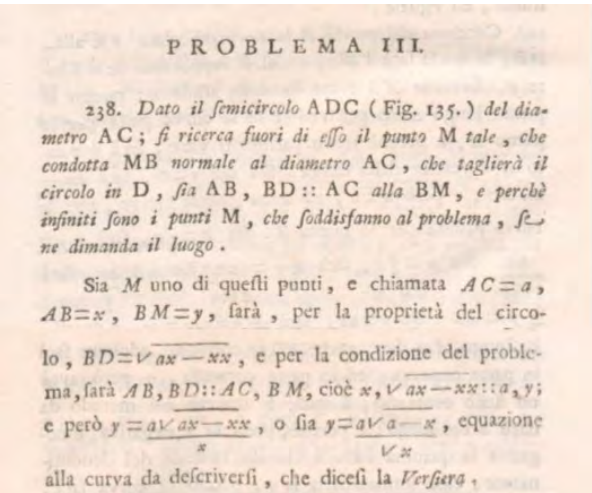


Figura 3. Figura de la versiera del llibre I de les *Instituzioni analitiche*



PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale, che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *ſia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti ſono i punti* M, *che ſoddisfanno al problema, ſe ne dimanda il luogo.*

Sia M uno di queſti punti, e chiamata $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, ſarà, per la proprietà del circolo, $BD = \sqrt{ax - xx}$, e per la condizione del problema, ſarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax - xx} :: a, y$; e però $y = \frac{a\sqrt{ax - xx}}{x}$, o ſia $y = \frac{a\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi, che diceſi la *Verſiera*.

Figura 4. Construcció de la versiera segons les *Instituzioni analitiche*

Abans de passar a estudiar-la, Agnesi es refereix a aquesta corba com la *versiera*. Ja havia estat estudiada per Pierre de Fermat (160665), que va determinar la seva quadratura al voltant del 1659 (Pla et al. 2011, p. 12-13). Newton també la va quadrar al seu *Mètode de fluxions i sèries infinites*, escrit el 1671 però no publicat fins al 1736 per Colson, com hem vist abans (Edwards, 1979, p. 215 i 216). A partir de les seves taules de quadratures, Newton determina que l'àrea és el doble de l'àrea d'un cert sector circular, que, de fet, podem relacionar amb l'arctangent. És Guido Grandi (167742) qui la batejarà com a *versiera* el 1718 al *Trattato del Galileo del moto naturalmente accelerato*, en relació amb el *versinus* (Loria, 1930, p. 93-99; Mulcrone 1957), tot i haver presentat la construcció de la corba a la seva obra *Quadratura circuli et hyperbolae per infinita hyperbolae & parabolas geometrice exhibita* (1703). Però a causa de la traducció anglesa de Colson de les *Instituzioni*, el nom d'Agnesi s'associa a la corba "vulgarly called the Witch" (Colson, 1801, I, p. 222) o "commonly called the Witch" (Colson, 1801, II, p. 79), la qual cosa sembla indicar que ja s'utilitzava aquest nom abans de la traducció de Colson. D'on prové, doncs, aquesta associació? Segons Mulcrone (1957), el terme *versiera* (del llatí *versoria*) prové del llatí *vertere*, que pot traduir-se com 'girar' o 'canviar'. Amb el temps, al llatí literari de l'edat mitjana, el mot *versiera* va adoptar el significat, tot i que rarament utilitzat, de "dona contrària a Déu", i d'aquí la seva accepció com a *bruixa*. Actualment es tendeix a abandonar l'ús de la "bruixa d'Agnesi", i s'adopta el nom de "corba d'Agnesi".

Tornant a la construcció de la corba a les *Instituzioni*, al llibre I Agnesi determina les seves característiques (concavitat-convexitat, punts d'inflexió, asímptota, vèrtex) de forma geomètrica. Més endavant, seguint el càlcul de Leibniz, al capítol IV del llibre II, aplica el càlcul diferencial per determinar els punts de flexió contrària, i de retrocés, que ara anomenem punts d'inflexió i cúspides. Quan l'abscissa creix, si dy decreix fins al *punt d'inflexió o de retrocés*, a partir del qual creix (o, el que és el mateix, si la corba primer és còncava i després convexa), dy ha de ser mínim. Per tant, ddy serà zero o infinit (Agnesi 1748, II, §94). Si, al contrari, primer la corba és convexa i després passa a ser còncava, aleshores dy ha de ser màxim i ddy serà zero o infinit, com abans. A l'exemple II (Agnesi 1748, II, §100) determina els punts d'inflexió de la versiera, i diferencia la seva equació dos cops (Figura 5):

$$ddy = \frac{3a^3dx^2 - 4a^2xdx^2}{4x \cdot (ax - x^2)^{3/2}}$$

Per arribar a aquesta expressió, veiem que Agnesi indica que pren dx constant. En l'enfocament leibnizià del càlcul diferencial, per determinar les diferències d'ordre superior d'una expressió calia especificar quina variable es considerava amb diferència constant (Bos, 1974). A l'obra *Institutiones calculi differentialis* (1755), Leonhard Euler (170783) basa el càlcul diferencial en el coeficient diferencial i en el concepte de funció d'una variable independent (que havia desenvolupat en la seva introducció a la teoria de funcions del 1748), per evitar d'aquesta manera la indeterminació de la diferenciació d'ordre superior.

Per determinar els punts d'inflexió, Agnesi primer considera el cas $ddy = 0$ i, per tant, estudia quan el numerador s'anul·la, d'on obté un punt d'inflexió quan $x = 3/4$ a, com ja havia justificat abans de manera geomètrica. El cas $ddy = \infty$ es produeix quan el denominador s'anul·la, per tant quan $x = 0$ o quan $x = a$, però en cap d'aquests dos casos la corba no presenta ni punt d'inflexió ni cúspide.

ESEMPIO II.

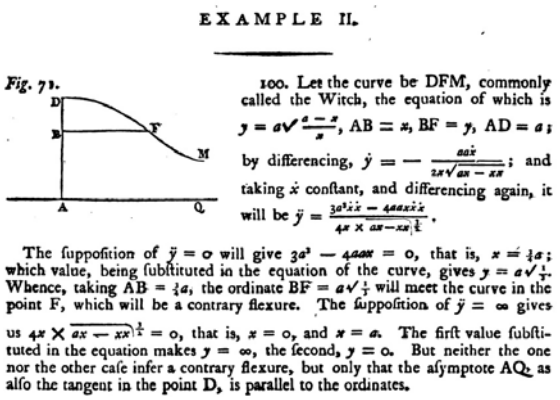
100. Sia la verſiera DFM, (*Fig.* 71.) la di cui equazione $y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, $AB = x$, $BF = y$, $AD = a$.

Differenziando, $dy = -\frac{aadx}{2x\sqrt{ax-xx}}$, e di nuovo differenziando, preſa dx coſtante, $ddy = \frac{3a^3dx^2 - 4aaxdx^2}{4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$.

La ſuppoſizione di $ddy = 0$ ci dà $3a^3 - 4aax = 0$, cioè $x = \frac{3a}{4}$, il qual valore ſoſtituito nell'equazione della curva rende $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, onde preſa $AB = \frac{3}{4}a$, la ordinata $BF = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ incontrerà la curva nel punto F, che ſarà un fleſſo contrario. La ſuppoſizione di $ddy = \infty$ ci dà $4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, cioè $x = 0$, ed $x = a$, il primo valore ſoſtituito nell'equazione rende $y = \infty$, il ſecondo $y = 0$; ma nè l'uno, nè l'altro caſo porta fleſſo contrario, e porta ſolo, che sì l'aſintoto AQ, come la tangente nel punto D è parallela alle ordinate.

Figura 5. Determinació dels punts d'inflexió de la *versiera* a Agnesi (1748, II, §100)

I per tancar aquesta secció, una reflexió sobre la traducció de Colson. A la Figura 6 podem veure que la diferència dy Colson l'escriu com la fluxió d'y, $\dot{y}$, i la diferència segona ddy, com la fluxió segona de y, $\ddot{y}$. És a dir, Colson reescriu les *Instituzioni* en termes fluxionaris, propis del mètode de Newton. Al començament del llibre II Agnesi defineix *diferència*, o *fluxió*, com qualsevol porció infinitament petita d'una quantitat variable (Agnesi, 1748, II, §3). Aquesta confusió entre *diferència* i *fluxió* no era inusual a l'època, com podem comprovar a l'obra de càlcul diferencial d'Euler abans esmentada, per exemple. Així, no és estrany que, en la seva traducció, Colson, a més de la traducció de l'italià a l'anglès, també substituís les "diferències de Leibniz" per les "fluxions de Newton".



EXAMPLE II.

Fig. 71.

100. Let the curve be DFM, commonly called the Witch, the equation of which is $y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, AB = x, BF = y, AD = a; by differencing, $\dot{y} = -\frac{aa\dot{x}}{2x\sqrt{ax-xx}}$; and taking $\dot{x}$ constant, and differencing again, it will be $\ddot{y} = \frac{3a^3\dot{x}\dot{x} - 4aax\dot{x}\dot{x}}{4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}}}$.

The ſuppoſition of $\ddot{y} = 0$ will give $3a^3 - 4aax = 0$, that is, $x = \frac{3}{4}a$; which value, being ſubſtituted in the equation of the curve, gives $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Whence, taking AB = $\frac{3}{4}a$, the ordinate BF = $a\sqrt{\frac{1}{3}}$ will meet the curve in the point F, which will be a contrary flexure. The ſuppoſition of $\ddot{y} = \infty$ gives us $4x \times \overline{ax-xx}^{\frac{3}{2}} = 0$, that is, $x = 0$, and $x = a$. The firſt value ſubſtituted in the equation makes $y = \infty$, the ſecond, $y = 0$. But neither the one nor the other caſe infer a contrary flexure, but only that the aſymptote AQ, as alſo the tangent in the point D, is parallel to the ordinates.

Figura 6. Determinació dels punts d'inflexió de la *versiera* a Colson (1801, II, p. 79)

Vida després de les Instituzioni

A partir del 1752, després de la mort del seu pare, Maria Gaetana es retira de la vida científica per tenir cura dels seus germans i educar-los, especialment el més jove, Giuseppe, i per dedicar-se a actes de caritat envers els pobres i malalts de Milà. Ha completat el seu cicle com a filòsofa i matemàtica, és hora de viure la seva nova vocació, una vida exemplar cristiana. El 1771 comença a dirigir la secció de dones pobres de l'hospital Pio Albergo Trivulzio, on viurà a partir del 1783. Els darrers cinc anys de la seva vida ella mateixa acabarà essent una pacient de l'hospital, on morirà el gener del 1799. El maig del mateix any, Frisi, amic de la família Agnesi, amb accés als arxius de la família, completa la seva biografia commemorativa *Elogio Storico di Dª Maria Gaetana Agnesi*. Les diferents facetes d'Agnesi (matemàtica, filosòfica, pedagògica, religiosa) han fomentat l'aparició de múltiples biografies i estudis sobre la seva figura, al llarg dels segles i fins a l'actualitat. Resulta evident que Maria Gaetana Agnesi va representar molt més que el nom d'una corba.